

การมีผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

Existence of Positive Solutions for Linear Diophantine Equations with Two Variables

บุรพา สิงหา ศุภรัตน์ ลีรัตนาวลี

ชนินาถ จันทร์ และ เอกพงษ์ ดวงดา

Boorapa Singha, Suparat Leeratanawalee,

Chaninat Chanthorn, and Eakkapong Duangdai

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology

E-mail: boorapa_sin@cmru.ac.th, suparat_lee@cmru.ac.th,

chaninat_cha@cmru.ac.th, eakkapong_dua@cmru.ac.th

บทคัดย่อ

การศึกษาเกี่ยวกับการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร $ax + by = c$ นั้นมีมาอย่างแพร่หลาย โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าสมการจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวหารร่วมมากของ a และ b หาร c ลงตัว ในทางตรงกันข้ามเงื่อนไขที่ทำให้สมการมีผลเฉลยที่เป็นบวกนั้นยังไม่มีการศึกษาอย่างชัดเจน งานวิจัยนี้อธิบายเงื่อนไขดังกล่าวในรูปของฟังก์ชันเพดานของจำนวน นอกจากนี้ผลการวิจัยพบว่าในบางกรณีสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกอยู่เป็นจำนวนอนันต์

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลย การหารลงตัว ตัวหารร่วมมาก ผลรวมเชิงเส้น

Abstract

The existence of solutions for a linear Diophantine equation with two variables, written as $ax + by = c$ has been widely studied. And, it is known that this equation can be solved only when the greatest common divisor of a



and b divides c . On the other hand, the existence of positive solutions for the equation seems to be unknown. In this research, we described conditions for the equation to have positive solutions in term of ceiling function of numbers. Moreover, in some cases, we found that the equation has infinitely many positive solutions.

Keyword: Diophantine Equation, Solution, Division, Greatest Common Divisor, Linear Combination

บทนำ

ทฤษฎีจำนวนเป็นสาขาหนึ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ซึ่งสนใจศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็มและการแก้ปัญหาก็เกี่ยวข้องกันกับจำนวนเต็ม เช่น การหาผลเฉลยของสมการหรือสมภาค (congruence) ในรูปแบบต่าง ๆ เป็นต้น การศึกษาวิชาทฤษฎีจำนวนนี้อาจจะไม่ได้ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ มาประกอบมากนัก แต่ผลงานในสาขานี้หลายอย่างมีประโยชน์อย่างมากในทางปฏิบัติหรือการประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น เราใช้ความรู้เรื่องสมภาคในเรื่องระบบ เลขหนังสือ ISBN เป็นต้น การศึกษาเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนนี้มีมาตั้งแต่สมัยโบราณมากกว่า 2,000 ปีที่ผ่านมาและมนุษย์เรานั้นได้ถูกปลูกฝังการศึกษาเรื่องจำนวนมาตั้งแต่วัยเยาว์โดยเริ่มตั้งแต่การฝึกนับเลข และได้ศึกษาสมบัติของจำนวนที่ลึกซึ้งขึ้นเรื่อย ๆ ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ ปัญหาสมการไดโอแฟนไทน์เป็นปัญหาหนึ่งที่ศึกษากันอย่างแพร่หลายในวิชาทฤษฎีจำนวนและได้มีการค้นพบผลลัพธ์ต่าง ๆ มากมายเกี่ยวกับปัญหานี้ โดยปัญหาสมการไดโอแฟนไทน์นี้สามารถประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลาย ๆ อย่างในชีวิตประจำวันได้ เช่น มีธนบัตรฉบับละ 100 บาท 1 ใบ จะสามารถแลกเป็นเหรียญ 10 บาทและเหรียญ 5 บาท ได้อย่างละกี่เหรียญและสามารถแลกได้กี่แบบ เป็นต้น ซึ่งปัญหานี้สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร $10x + 5y = 100$ การศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นนี้จะใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนหลาย ๆ เรื่อง เช่น การหารลงตัว ตัวหารร่วมมาก เป็นต้น



วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาเงื่อนไขการมีผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

กรอบความคิดในการวิจัย

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $ax+by=c$ ก็คือการหาค่า x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริง โดยจะสนใจหาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น เช่น พิจารณาสมการ $3x+15y=9$ จะพบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $x=-2$ และ $y=1$ (หรือเขียนผลเฉลยในรูปคู่อันดับ $(-2,1)$) เพราะว่า $3(-2)+15(1)=9$

สำหรับสัญลักษณ์ $d=(a,b)$ จะหมายถึง d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b และจะเขียน $a|b$ แทนการที่ a หาร b ลงตัวเมื่อ $a \neq 0$ ในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับตัวหารร่วมมากและการหารลงตัวนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ทราบกันดีว่า

(1) สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax+by=c$ จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d|c$ เมื่อ $d=(a,b)$ ยิ่งกว่านั้น ถ้าทราบผลเฉลยเฉพาะ $x=x_0$ และ $y=y_0$ ชุดหนึ่งของสมการ ก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

(2) ผลเฉลยใดๆหรือเรียกว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการจะอยู่ในรูป

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \text{ และ } y = y_0 - \frac{a}{d}t \text{ เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

สมการไดโอแฟนไทน์บางชนิดไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก (Burton, 2002, p.241-242) แต่สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรนั้นอาจมีหรือไม่มีก็ได้ ในงานวิจัยนี้ เราใช้ผลลัพธ์ (1) และ (2) เป็นแนวคิดหลัก ประกอบกับสมบัติของจำนวนเต็มหลายประการเพื่อแสดงเงื่อนไขที่จะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร มีผลเฉลยที่เป็นบวก (ซึ่งในงานวิจัยนี้หมายถึงทั้งสอง ค่าของตัวแปรต้องเป็นบวก) โดยใช้ระเบียบวิธีการพิสูจน์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และจะศึกษาเฉพาะในกรณีที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ เนื่องจาก ถ้า $a=0$ แล้วจะได้ $(0)x+by=c$ นั่นคือ $by=c$ ดังนั้น $y=\frac{c}{b}$ ทำให้ได้ว่าผล



เฉลยจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(x, \frac{c}{b})$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ในทำนองเดียวกัน
เมื่อ $b = 0$ ผลเฉลยจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(\frac{c}{a}, y)$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ความรู้พื้นฐาน (Basic concepts)

ในส่วนแรกนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทที่สำคัญที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้วสมการเชิงเส้นในรูป $ax + by = c$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม จะเรียกว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ถ้า $d = (a, b)$ แล้ว d สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ a และ b ได้ นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $d = an + bm$ (Burton, 2002, p. 22)

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $a = 24$ และ $b = 9$ โดยที่ $(24, 9) = 3$ จะได้ $n = -1$ และ $m = 3$ โดยที่ $3 = 24(-1) + 9(3)$

ทฤษฎีบทที่ 1.4 และ 1.5 ต่อไปนี้ (Burton, 2002, p.34) เป็นที่ทราบกันอย่างแพร่หลายในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งแสดงให้เห็นเงื่อนไขการมีผลเฉลยของสมการ

ทฤษฎีบทที่ 1.4 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a, b \neq 0$ สมการจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d | c$ เมื่อ $d = (a, b)$

ทฤษฎีบทที่ 1.5 ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มี $x = x_0$ และ $y = y_0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะแล้ว ทุกผลเฉลยของสมการอยู่ในรูป $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ และ $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ เมื่อ $t \in \mathbf{Z}$ และ $d = (a, b)$



บทนิยาม 1.6 ให้ x เป็นจำนวนจริง ใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ แทนฟังก์ชันเพดาน (ceiling function) ของ x ซึ่งหมายถึงจำนวนเต็มคี่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x (Rosen, 1993, p.6) เช่น $\lceil 0.1 \rceil = 1$, $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil -2.6 \rceil = -2$ เป็นต้น

ข้อสังเกตที่ 1.7 ถ้ามีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a, b) เมื่อ $b - a \leq 1$ แล้วจะมีจำนวนเต็มอยู่ในช่วงเปิดนี้เพียงจำนวนเดียว

การพิสูจน์ ให้ $b - a \leq 1$ และสมมติ มี $p, q \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $p, q \in (a, b)$ และ $p \neq q$

โดยไม่เสียสยทั่วไป สมมติให้ $q > p$ ดังนั้นจะได้ $q - p \geq 1$ จาก $p, q \in (a, b)$ จะได้ $b > q$ และ $p > a$ ดังนั้น $b + p > q + a$ ซึ่งแกกสมการได้ $b - a > q - p$ ขัดแย้งกับ $b - a \leq 1$ และ $q - p \geq 1$ เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a, b) เพียงตัวเดียว

2. ผลลัพธ์หลัก (Main results)

ในส่วนนี้จะพิสูจน์เงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอดแพนโทนเชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยพิจารณาแยกเป็น 4 กรณีทั้งหมดที่แตกต่างกัน และสำหรับทฤษฎีบทหลักที่จะกล่าวถึงทั้งหมดต่อไปนี้ จำนวนเต็ม m และ n จะหมายถึงจำนวนเต็มที่น่ามาเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้น $d = an + bm$ ตามทฤษฎีบทที่ 1.2 เมื่อ $(a, b) = d$

ทฤษฎีบทที่ 2.1 สมการไดโอดแพนโทนเชิงเส้น $ax + by = c$ โดยที่ $a, b > 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อ $d \mid c$ และ $\left(\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a} \right) \right)$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้สมการไดโอดแพนโทนเชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยที่ $a, b > 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 1.2 และ ทฤษฎีบทที่ 1.4 จะได้ว่า $d = an + bm \exists n, m \in \mathbb{Z}$ และ $d \mid c$



เนื่องจาก $a\left(\frac{nc}{d}\right) + b\left(\frac{mc}{d}\right) = (an + bm)\frac{c}{d} = d \cdot \frac{c}{d} = c$ ดังนั้น

$x_0 = \frac{nc}{d}$ และ $y_0 = \frac{mc}{d}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของสมการ $ax + by = c$ โดย

ทฤษฎีบท 1.6 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ

$$t \in \mathbf{Z}$$

จากสมมติฐานว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวก ดังนั้นจะมีค่า $t \in \mathbf{Z}$ ที่ทำให้ $x, y > 0$

พิจารณาค่า t ดังกล่าว จาก $\frac{nc + bt}{d} > 0$ และ $\frac{mc - at}{d} > 0$ โดย

การแก้สมการทั้งสองประกอบกับการที่ $a, b > 0$ จะได้ว่า $-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$

จากนั้นพิจารณาแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) > 1$ แล้วจะได้ $\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right)c > 1$

จะได้ $\frac{dc}{ab} > 1$ (เนื่องจาก $d = an + bm$ ดังนั้น $\frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}$)

กรณีที่ 2 ถ้า $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) \leq 1$ แล้ว เช่นเดียวกันกับกรณี 1 สามารถ

จัดรูปสมการได้เป็น $\frac{dc}{ab} \leq 1$ ต่อมาสมมติ $\frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b}\right) = j$ เมื่อ $0 < j \leq 1$ ถ้า

$-\frac{nc}{b} \in \mathbf{Z}$ แล้วจะได้ว่าจำนวนเต็มตัวถัดไป คือ $-\frac{nc}{b} + 1$ และจาก

$-\frac{nc}{b} < t < \frac{mc}{a}$ ดังนั้นจะได้ $t \in \left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right) = \left(-\frac{nc}{b}, -\frac{nc}{b} + j\right)$ เมื่อ

$-\frac{nc}{b} + j \leq -\frac{nc}{b} + 1$ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับการที่ $t \in \mathbf{Z}$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z}$

นอกจากนี้ โดยข้อสังเกตที่ 1.7 จะมีจำนวนเต็มเพียงตัวเดียวใน

$\left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right)$ คือ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil$ ดังนั้น จาก $t \in \left(-\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right)$ และ $t \in \mathbf{Z}$ จึงได้ว่า



$$t = \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil \text{ ทำให้ได้ว่า } \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a} \text{ จะได้ } \frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z} \text{ และ}$$

$$\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$$

$$\text{จึงสรุปได้ว่า } d \mid c \text{ และ } \left(\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z} \text{ และ } \right. \right.$$

$$\left. \left. \left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a} \right) \right)$$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d \mid c$ โดยทฤษฎีบทที่ 1.4 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ มีผลเฉลย และทฤษฎีบท 1.5 ทำให้ได้ว่าผลเฉลยทั่วไป คือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbf{Z}$ (เนื่องจาก $x_0 = \frac{nc}{d}$ และ

$y_0 = \frac{mc}{d}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของสมการ)

ถ้า $\frac{dc}{ab} > 1$ แล้วจะได้ $\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b} \right) c > 1$ (เนื่องจาก

$$d = an + bm \text{ ดังนั้น } \frac{d}{ab} = \frac{n}{b} + \frac{m}{a}) \text{ นั่นคือ } \frac{mc}{a} - \left(-\frac{nc}{b} \right) > 1 \text{ ดังนั้น มี } t_1 \in \mathbf{Z} \text{ ที่}$$

$$-\frac{nc}{b} < t_1 < \frac{mc}{a} \text{ ต่อมาพิจารณา } -\frac{nc}{b} < t_1 \text{ และ } t_1 < \frac{mc}{a} \text{ โดยการแก้สมการ}$$

จะได้ $nc + bt_1 > 0$ และ $mc - at_1 > 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$x = \frac{nc + bt_1}{d} > 0 \text{ และ } y = \frac{mc - at_1}{d} > 0$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้า $\frac{dc}{ab} \leq 1$ และ $-\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z}$ และ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$ แล้ว

สมมติ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = t_2 \exists t_2 \in \mathbf{Z}$ จะได้ $-\frac{nc}{b} \leq t_2 < \frac{mc}{a}$ แต่เนื่องจาก $-\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z}$

ดังนั้น $-\frac{nc}{b} < t_2 < \frac{mc}{a}$ ต่อมาพิจารณา $-\frac{nc}{b} < t_2$ และ $t_2 < \frac{mc}{a}$ โดยการแก้

สมการจะได้ $nc + bt_2 > 0$ และ $mc - at_2 > 0$ ดังนั้นสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็น

$$x = \frac{nc + bt_2}{d} > 0 \text{ และ } y = \frac{mc - at_2}{d} > 0 \text{ ทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมี}$$

ผลเฉลยที่เป็นบวก $\square$



ทฤษฎีบทที่ 2.2 สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ โดยที่ $a > 0, b < 0$ ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์

การพิสูจน์ สมมติให้ $d \mid c$ โดยที่ $a > 0, b < 0$ จากนั้นดำเนินการในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในส่วนแรกของทฤษฎีบทที่ 2.1 จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = \frac{nc + bt}{d}$ และ $y = \frac{mc - at}{d}$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ (A) แต่จาก $b < 0$ จะได้ $b = -k \exists k \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $x = \frac{nc - kt}{d}$ จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นบวก

จะได้ $\frac{nc - kt}{d} > 0$ $nc - kt > 0$ $nc > kt$ $\frac{nc}{k} > t$ _____ (B)		$\frac{mc - at}{d} > 0$ $mc - at > 0$ $mc > at$ $\frac{mc}{a} > t$ _____ (C)
--	--	---

ค่า t ที่สอดคล้องกับอสมการ (B) และ (C) คือค่า t ที่ $t < \min \left\{ \frac{nc}{k}, \frac{mc}{a} \right\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่า t ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน (A) ก็จะได้ผลให้ผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์เช่นกัน

เนื่องจากกรณี $a < 0, b > 0$ นั้นสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 2.2 และในกรณี $a < 0, b < 0$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 2.1 ดังนั้นสำหรับอีก 2 กรณีดังกล่าวจะละการพิสูจน์ไว้ เพื่อความกระชับ โดยแสดงผลลัพธ์ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.3 สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ โดยที่ $a < 0, b > 0$ ถ้า $d \mid c$ แล้ว สมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์



ทฤษฎีบทที่ 2.4 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax + by = c$ โดยที่ $a, b < 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อ $d | c$ และ $\left(-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(-\frac{dc}{ab} \leq 1 \text{ และ } \frac{mc}{a} \notin \mathbb{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{mc}{a} \right\rceil < -\frac{nc}{b} \right)\right)$

ตัวอย่าง 2.5

(1) กำหนดสมการ $4x + 10y = 14$ ซึ่ง $(4, 10) = 2$ จะได้ $2 | 14$ ดังนั้น สมการ มีผลเฉลย ต่อมาพิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(2)(14)}{(4)(10)} = 0.7 \leq 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $2 = 4(-2) + 10(1)$ จะได้ $n = -2, m = 1$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} = -\frac{(-2)(14)}{10} = 2.8 \notin \mathbb{Z}$ และ $\lceil 2.8 \rceil = 3 < \frac{(1)(14)}{4} = \frac{mc}{a}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 สมการ $4x + 10y = 14$ มีผลเฉลย ที่เป็นบวก เช่น $x = 1, y = 1$ เป็นผลเฉลยหนึ่งที่เป็นบวกของสมการ

(2) กำหนดสมการ $3x + 15y = 9$ จะได้ว่า $(3, 15) = 3$ และ $3 | 9$ ดังนั้น สมการมีผลเฉลย ต่อมา พิจารณา $\frac{dc}{ab} = \frac{(3)(9)}{(3)(15)} = 0.6 \leq 1$ และพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $3 = 3(1) + 9(0)$ จะได้ $n = 1, m = 0$ ดังนั้น $-\frac{nc}{b} = -\frac{(1)(9)}{15} = -0.6 \notin \mathbb{Z}$ แต่ $\lceil -0.6 \rceil = 0$ ซึ่ง $\frac{mc}{a} = \frac{(0)(9)}{3} = 0$ จึงไม่เป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2.1 ดังนั้น สมการ $3x + 15y = 9$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นบวก

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดสมการ $6x - 12y = 36$ ซึ่ง $(6, 12) = 6$ จะได้ $6 | 36$ ดังนั้นสมการมี ผลเฉลย นั่นคือจากทฤษฎีบทที่ 2.2 เราสามารถสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์ ต่อมาลองตรวจสอบความถูกต้อง โดยพิจารณาผลรวมเชิงเส้น $6 = 6(1) + 12(0)$ ดังนั้น $n = 1, m = 0$ จะได้ $x = \frac{(1)(36) - 12t}{6} = 6 - 2t$ และ $y = \frac{(0)(36) - 6t}{6} = -t$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ ต่อมาพิจารณาค่า t ที่ทำให้ $x, y > 0$ จะได้ $6 - 2t > 0$ และ $-t > 0$ โดยเมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $t < \min\{3, 0\} = 0$ ซึ่งมีเป็นจำนวนอนันต์



เช่น ถ้า $t = -1$ จะได้ $x = 8$ และ $y = 1$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(6(8) - 12(1) = 36)$ ถ้า $t = -2$ จะได้ $x = 10$ และ $y = 2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(6(10) - 12(2) = 36)$

สรุปและอภิปรายผล

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า สามารถตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทหลักได้โดยใช้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เช่น จากตัวอย่าง 2.5 (2) ถ้าสมมติให้สมการ $3x + 15y = 9$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก $x_0 > 0$ และ $y_0 > 0$ จะได้ $3x_0 + 15y_0 = 9$ และแก้สมการได้ $x_0 = 3 - 5y_0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $x_0 > 0$ ดังนั้นสมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นบวก นั่นคือทฤษฎีบทที่ 2.1 สรุปผลได้ถูกต้อง

ทฤษฎีบทหลักทั้ง 4 ทฤษฎีบทที่ได้นำเสนอไปได้ให้เงื่อนไขที่ใช้ตรวจสอบการมีผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร โดยไม่ต้องทดลองคำนวณหาผลเฉลยจริงซึ่งค่อนข้างใช้เวลาพอสมควร สำหรับการใช้ทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบท 2.4 นั้นจำเป็นต้องทราบค่า m และ n จากผลรวมเชิงเส้น $d = an + bm$ เสียก่อนจึงสามารถใช้ ทฤษฎีบทได้ ในการปรับปรุงทฤษฎีบทให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นจึงอาจพิจารณาศึกษาเงื่อนไขที่ขึ้นอยู่กับค่า a, b, c หรือ d เพียงเท่านั้นโดยไม่จำเป็นต้องหาค่า m และ n ก่อน จะทำให้การใช้ทฤษฎีบทมีความสะดวกมากขึ้น ซึ่งยังคงต้องศึกษาต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Burton D. M. (2002). *Elementary number theory*. (5th ed.). New York: McGraw-Hill.
- Rosen K. H. (1993). *Elementary number theory and its applications*. (3rd ed.). New York: Addison-Wesley.