บทที่ 2 แนวคิดทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการอธิบายกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดของ $F(V,W)$ และกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของไอดีลของ $F(V,W)$ ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์ และการแปลงเชิงเส้น เป็นอย่างมาก ดังนั้นผู้เขียน-จะขอนำเสนอทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องไว้ในบทนี้

***บทตั้ง* 2.1.** [5, พรอพอสิชัน 3.3] *กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $S \subseteq V$ โดยที่ S เป็นอิสระเชิงเส้น ถ้า $w \in V \setminus \langle S \rangle$ แล้ว $S \cup \{w\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น*

***ทฤษฎีบท* 2.2.** [10, ทฤษฎีบท 2.2] *กำหนดให้ V และ U เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลดื F. If $B = \{v_i : i \in I\}$ เป็นฐานหลักของ V แล้วเราจะนิยามการแปลงเชิงเส้น $\alpha \in \mathcal{L}(V,U)$ โดยการกำหนด $v_i\alpha \in U$ สำหรับแต่ละ $i \in I$ และขยายไปยัง α โดยใช้ความอิสระเชิงเส้น กล่าวคือ*

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n)\alpha = a_1(v_1\alpha) + a_2(v_2\alpha) + \cdots + a_n(v_n\alpha)$$

ที่ซึ่ง $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ กระบวนการนี้จะสร้างการแปลงเชิงเส้นได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น (ถ้า $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(V,U)$ ซึ่ง $v_i\alpha = v_i\beta$ สำหรับทุก ๆ $v_i \in B$ แล้ว $\alpha = \beta$)

***ทฤษฎีบท* 2.3.** [10, ทฤษฎีบท 1.4] *ถ้า S เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วจะมีปริ-ภูมิย่อย T ของ V โดยที่ $V = S \oplus T$*

***ทฤษฎีบท* 2.4.** [10, ทฤษฎีบท 1.13] *กำหนดให้ S และ T เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V โดยที่ $V = S \oplus T$ ถ้า B_1 เป็นฐานหลักของ S และ B_2 iเป็นฐานหลักของ T แล้ว $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ และ $B_1 \cup B_2$ เป็นฐานหลักของ V*

***บทตั้ง* 2.5.** [6, หน้า 98] *ให้ S เป็นกึ่งกรุป 0-เชิงเดียวบริบูรณ์ ถ้า $a, b \in S$ และ $ab \neq 0$ แล้ว $ab \in R_a \cap L_b$*

***บทตั้ง* 2.6.** [6, พรอพอสิชัน 2.3.7] *ให้ $a, b \in D$ เมื่อ D **คือชั้นสมมูล** $\mathcal{D}$ แล้ว $ab \in R_a \cap L_b$ ก็ต่อเมื่อ $L_a \cap R_b$ บรรจุนิจพล*

***บทตั้ง* 2.7.** [14, บทตั้ง 24] *ให้ a เป็นสมาชิกในกึ่งกรุป S และ T เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติของ S*

(1) ถ้า $L_a \cap T \neq \emptyset$ แล้ว $L_a \cap T$ บรรจุนิจพล

(2) ถ้า $R_a \cap T \neq \emptyset$ แล้ว $R_a \cap T$ บรรจุนิจพล

เพื่อความสะดวกเราจะประยุกต์ใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกับที่ถูกแนะนำไว้ใน [2, หน้า 241] สำหรับการแปลงเชิงเส้นใน $T(V)$ ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F การสร้างฟังก์ชัน $\alpha \in T(V)$ อันดับแรกเราจะเลือกฐานหลัก $\{e_i : i \in I\}$ สำหรับ V และเลือกเซตย่อย $\{u_i : i \in I\}$ ใน V แล้วกำหนดให้ $e_i\alpha = u_i$ สำหรับแต่ละ $i \in I$ และสามารถขยายการกระทำนี้โดย-ความเชิงเส้นไปยัง V ในที่นี้เราจะเขียนแทน $\{e_i : i \in I\}$ ด้วย $\{e_i\}$ และ $\{u_i : i \in I\}$ ด้วย $\{u_i\}$ ดังนั้น $\alpha \in T(V)$ ถูกนิยามโดย

$$\alpha = \begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix}$$

ในงานวิจัยนี้ ปริภูมิย่อย U ของปริภูมิเวกเตอร์ V ถูกก่อกำเนิดโดยเซตย่อย $\{e_i\}$ ที่เป็นอิส-ระเชิงเส้นของ V จะเขียนแทนด้วย $\langle e_i \rangle$ และเมื่อเขียน $U = \langle e_i \rangle$ จะหมายถึง $\{e_i\}$ เป็นฐาน-หลักของ U โดยที่ $\dim(U) = |I|$ สำหรับแต่ละ $\alpha \in T(V)$, ถ้าเราเขียน $U\alpha = \langle u_i\alpha \rangle$ จะหมายถึงเซต $\{u_i\alpha\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย $U\alpha$ ของ V และ $u_i \in U$ ทุก ๆ i

ให้ $\{u_i\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F สัญลักษณ์ $\sum a_i u_i$ หมายถึงการรวมเชิงเส้นต่อไปนี้

$$a_{i_1}u_{i_1} + a_{i_2}u_{i_2} + \cdots + a_{i_n}u_{i_n}$$

บาง $n \in \mathbb{N}$, $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n} \in \{u_i\}$ และสเกลาร์ $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in F$

กำหนดให้ W เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F นิยาม

$$T(V, W) = \{\alpha \in T(V) : V\alpha \subseteq W\}$$

และ

$$F(V,W) = \{\alpha \in T(V,W) : V\alpha \subseteq W\alpha\} = \{\alpha \in T(V,W) : V\alpha = W\alpha\}$$

เราจะได้ว่า $T(V,W)$ เป็นกึ่งกรุปของ $T(V)$ และ $F(V,W)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติของ $T(V,W)$ เพื่อให้ตรงกับบทความวิจัยที่ตีพิมพ์โดย Sullivan [17] เราจะเขียนแทน $F(V,W)$ ด้วย Q

***บทตั้ง* 2.8.** [15, บทตั้ง 2.3] *กำหนดให้ $\alpha, \beta \in Q$ แล้วจะได้ว่า*

(1) $\alpha\mathcal{L}\beta$ ก็ต่อเมื่อ $V\alpha = V\beta$

(2) $\alpha\mathcal{R}\beta$ ก็ต่อเมื่อ $\ker\alpha = \ker\beta$

(3) $\alpha\mathcal{D}\beta$ ก็ต่อเมื่อ $\dim(V\alpha) = \dim(V\beta)$

(4) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$

***ทฤษฎีบท* 2.9.** [17, ทฤษฎีบท 8] *ไอดีลทั้งหมดของ Q คือเซต*

$$Q_k = \{\alpha \in Q : \dim(V\alpha) \leq k\}$$

ที่ซึ่ง $0 \leq k \leq \dim(W)$

ตลอดทั้งงานวิจัยนี้ เราจะกำหนดให้ W เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์จำกัด F โดยที่ $\dim(W) = n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ นิยาม

$$J(k) = \{\alpha \in Q : \dim(V\alpha) = k\}$$

ที่ซึ่ง $0 \leq k \leq n = \dim(W)$ แล้วจะได้ $J(k)$ เป็นชั้นสมมูล $\mathcal{J}$ ของ Q ยิ่งไปกว่านั้น แต่ละ $J(k)$ บรรจุสมาชิกนิจพล กล่าวคือ ถ้าให้ $\{w_1, \ldots, w_k\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นใน W ดังนั้นเราสามารถเขียน $V = \langle w_1, \ldots, w_k\rangle \oplus \langle v_j\rangle$ สำหรับบางปริภูมิย่อย $\langle v_j\rangle$ ของ V และนิยาม

$$\epsilon = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_k & v_j \\ w_1 & \cdots & w_k & 0 \end{pmatrix}$$

แล้ว ϵ เป็นนิจพลใน Q ซึ่ง $\dim(V\epsilon) = k$ นั่นคือ ϵ เป็นนิจพลใน $J(k)$ ในกรณีเฉพาะเราได้ว่า $J(0) = \left\{\binom{V}{0}\right\}$

สังเกตว่า $V\alpha = W$ สำหรับทุก ๆ $\alpha \in J(n)$ เนื่องจาก $V\alpha \subseteq W$ และ $\dim(V\alpha) = n = \dim(W)$ เป็นจำนวนจำกัด เป็นผลให้ $J(n)$ ประกอบไปด้วยชั้นสมมูล $\mathcal{L}$ เพียงอันเดียว

สำหรับไอดีล Q_k นิยามในทฤษฎีบท 2.9 ($0 \leq k \leq n$) จะได้ว่า

$$Q_k = J(0) \cup J(1) \cup \cdots \cup J(k) \text{ และ } Q_n = Q$$

***บทตั้ง* 2.10.** [15, บทตั้ง 2.5] *Q_k เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติของ Q*

***บทตั้ง* 2.11.** [15, บทตั้ง 2.7] *ถ้า $\alpha \in Q$ และ $V\alpha = W\alpha = \langle w_i\alpha \rangle$ ที่ซึ่ง $w_i \in W$ สำหรับแต่ละ i แล้ว $\{w_i\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น และ $V = \ker\alpha \oplus \langle w_i \rangle$*

ให้ $GL(V)$ เป็นเซตของสมสัณฐานของ V เหนือฟีลด์ F เป็นที่รู้ดีว่า $GL(V)$ เป็นกรุปภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน ถ้า $\dim(V) = m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ $|F| = q$ แล้ว $|GL(V)| = (q^m - 1)(q^m - q)(q^m - q^2)\cdots(q^m - q^{m-1})$ ดู [11, ทฤษฎีบท 8.5]

โดยบทตั้ง 2.8 จะได้ว่าสำหรับ $\alpha, \beta \in Q$

$$\beta \in H_\alpha \text{ ก็ต่อเมื่อ } V\beta = V\alpha \text{ และ } \ker\beta = \ker\alpha$$

***บทตั้ง* 2.12.** [15, บทตั้ง 3.1] *กำหนดให้ ϵ เป็นสมาชิกนิจพลใน Q แล้วจะได้ $H_\epsilon = \{\epsilon\sigma \in Q : \sigma \in GL(V\epsilon)\}$.*

***บทตั้ง* 2.13.** [15, บทตั้ง 3.2] *กำหนดให้ ϵ เป็นสมาชิกนิจพลใน Q แล้วจะได้ $H_\epsilon \cong GL(V\epsilon)$ ภายใต้การส่ง $\epsilon\sigma \mapsto \sigma$*

***ทฤษฎีบท* 2.14.** [15, บทตั้ง 3.3] *กำหนดให้ $\{\epsilon_p : p \in P\}$ เป็นเซตของสมาชิกนิจพลทั้งหมดใน $J(n)$ แล้วจะได้*

$$J(n) = \bigcup_{p \in P} H_{\epsilon_p}$$

เป็นยูเนียนที่ไม่มีส่วนร่วมกันของกรุป H_{ϵ_p} โดยที่ $H_{\epsilon_p} \cong H_{\epsilon_q}$ สำหรับทุก ๆ $p, q \in P$

สังเกตว่า ถ้า $\dim(V) = m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ $|F| = q$ แล้ว $J(n)$ จะมีจำนวนชั้นสมมูล $\mathcal{H}$ ที่แตกต่างกันเท่ากับ $q^{n(m-n)}$ ดู [15, ทฤษฎีบท 5.4] ดังนั้น

$$J(n) = \bigcup_{i=1}^{q^{n(m-n)}} H_{\epsilon_i}$$

***บทตั้ง* 2.15.** [15, บทตั้ง 3.4] *กำหนดให้ ϵ_i และ ϵ_j เป็นสมาชิกนิจพลใน $J(n)$ และ $\sigma \in GL(W)$ แล้วจะได้ $\epsilon_i\sigma\epsilon_j = \epsilon_i\sigma$ และ $\epsilon_i\epsilon_j = \epsilon_i$*

***ทฤษฎีบท* 2.16.** [15, บทตั้ง 3.6] *$J(n)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติของ Q*

***บทตั้ง* 2.17.** [15, บทตั้ง 4.1] *$J(n-1) \subseteq J(n)\alpha J(n)$ สำหรับทุก ๆ $\alpha \in J(n-1)$*

***บทตั้ง* 2.18.** [15, บทตั้ง 4.7] *สำหรับ $0 \leq k \leq n-1$ จะได้ $Q_k = \langle J(k) \rangle$*

เราให้ $E(J(n)) = \{\epsilon_p : p \in P\}$ เป็นเซตของนิจพลทั้งหมดใน $J(n)$ สำหรับแต่ละ $\epsilon_p \in E(J(n))$ ได้ว่า $H_{\epsilon_p} \cong GL(V\epsilon_p) = GL(W)$ โดยบทตั้ง 2.13 เนื่องจาก $GL(W)$ เป็นกรุปจำกัด เป็นผลให้ H_{ϵ_p} เป็นกรุปจำกัด สำหรับทุก ๆ $p \in P$ กำหนดให้ U เป็นกรุปย่อยใหญ่สุดของ $GL(W)$ และ $\Phi_p \colon H_{\epsilon_p} \to GL(W)$ เป็นสมสัณฐานที่นิยามโดย $\epsilon_p\delta \mapsto \delta$ สำหรับทุก ๆ $\delta \in GL(W)$ เรานิยาม

$$M_p = U\Phi_p^{-1} = \{\epsilon_p\delta : \delta \in U\} \qquad (*)$$

แล้วจะได้ว่า M_p เป็นกรุปย่อยใหญ่สุดของ H_{ϵ_p} สำหรับทุก ๆ $p \in P$

***บทตั้ง* 2.19.** [15, บทตั้ง 4.3] *กำหนดให้ M_p ถูกนิยามตาม (*) และ $M = \bigcup_{p\in P} M_p$ แล้ว M เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติของ $J(n)$*

***บทตั้ง* 2.20.** [15, ทฤษฎีบท 4.4] *กำหนดให้ M นิยามตามบทตั้ง 2.19 แล้ว $Q_{n-1} \cup M$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของ Q*

***บทตั้ง* 2.21.** [15, ทฤษฎีบท 4.2] *สำหรับ $n \geq 2$ จะได้ว่าเซต $Q_{n-2} \cup J(n)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของ Q*